8. fejezet

Deriválás

8.1. Középiskolai ismétlő feladatok

8.1. Egy álló helyzetből induló Ford Mustang Cobra által megtett út nagyságát az $s(t) = t^2$ függvény írja le.

a) Határozzuk meg a gépkocsi átlagsebességét a $t = 1\,\mathrm{s}$ és $t = 2\,\mathrm{s}$ közötti időintervallumban.

b) Állapítsuk meg a gépkocsi sebességét a $t = 1\,\mathrm{s}$ pillanatban.

8.2. Egy autó indulásától számított 10 másodpercig a megtett utat az $s(t) = t^2$ függvény írja le az idő (t) függvényében. Az idő mértékegysége: másodperc (s), a megtett úté: méter (m).

a) Az indulástól eltelt 5 másodperc alatt mennyi utat tett meg az autó? Mennyi volt ezalatt az 5 másodperc alatt az átlagsebessége?

b) Mennyi utat tett meg az autó az 1. és az 5. másodperc között? Mennyi volt ezalatt az átlagsebessége?

c) Mennyi utat tett meg az autó az 1. és az 3. másodperc között? Mennyi volt ezalatt az átlagsebessége?

d) Mennyi utat tett meg az autó az 1. és az 2. másodperc között? Mennyi volt ezalatt az átlagsebessége?

e) Mennyi volt az autó pillanatnyi sebessége $t = 1$ időpontban?

f) Mennyi volt az autó pillanatnyi sebessége $t = 2$ időpontban?

g) Ábrázoljuk az idő függvényében a sebességet!

h) Határozzuk meg a $t = 1$ időpontban a gyorsulást!

8.3. Amennyiben Galilei a pisai torony tetejéről, 54,5 méter magasságból dobott volna le egy golyót, akkor az t másodperc múltán $s = 54{,}5 - 5t^2$ méter magasságban lett volna a földfelszín felett.

a) Adja meg a golyó sebességét az időfüggvényében.

b) Mennyi időbe telik amíg a golyó földet ér?

c) Mekkora a golyó sebessége a földet érés pillanatában?

8.2. Feladatok gyakorlatra

8.4. Az elemi függvények deriváltjait felhasználva adjuk meg az alábbi függvények deriváltját!

a) $f(x) = x^2$, $f(x) = (2x)^5$, $f(x) = (3x+1)^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{4}{3x}$, $f(x) = \frac{x}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}}$

d) $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^{2x}$

e) $f(x) = \log_3 x$, $f(x) = \ln 5x$, $f(x) = \log_5 x^3$

f) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

8.5. Adjuk meg a deriváltfüggvényeket a deriválási szabályok felhasználásával!

a) $f(x) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x$

b) $f(x) = x^4 + \frac{3}{4}x^3 - 2x + 6$

c) $f(x) = \log_2 x + \sin x$

d) $f(x) = \log_2 x \cdot \sin x$

e) $f(x) = \frac{\log_2 x}{\sin x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos x + \frac{1}{x^2}\right)$

g) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

8.6. Adjuk meg az alábbi összetett függvények deriváltjait!

a) $f(x)=\sin(2x)$, $f(x)=\sin(x^3)$

b) $f(x)=\sin^3 x$, $f(x)=\ln^2 x$, $f(x)=\mathrm{tg}^2\, 2x$,

c) $f(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$, $f(x)=\sqrt{\cos x}$

d) $f(x)=\ln(2x+3)$, $f(x)=\ln(x^2+5)$, $f(x)=\ln(\sin x)$,

e) $f(x)=e^{(5x)}$, $f(x)=e^{(x^2)}$, $f(x)=e^{(-x^2)}$,

f) $f(x)=2^{(5x+1)}$, $f(x)=3^{(x^2+5x)}$

g) $f(x)=\cos(\ln x)$

8.7. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját:

a) $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=x^{-1}$

b) $f(x)=2^x$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\log_3 x$, $f(x)=\ln x$

c) $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\mathrm{tg}\, x$, $f(x)=\mathrm{ctg}\, x$

d) $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\mathrm{arctg}\, x$, $f(x)=\mathrm{arcctg}\, x$

e) $f(x)=\frac{x^2-x}{5}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$, $f(x)=\frac{x}{3x^2}+\frac{4}{2x}-\frac{2}{x^3}$, $f(x)=\sqrt[4]{x^6}$

f) $f(x)=\frac{2^x-\log_2 x}{2}$, $f(x)=\lg\sqrt{x}$

g) $f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos x}{\sin x}$, $f(x)=\frac{1+2\sin x-\sin^2 x}{\cos x}$

h) $f(x)=2^x\cdot\sin x$, $f(x)=x^5\cdot\ln x$, $f(x)=\sqrt[4]{x}\cdot\mathrm{tg}\, x$, $f(x)=e^x\cdot\arcsin x$

i) $f(x)=\frac{x^2-x}{2x+3}$, $f(x)=\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{x}}$, $f(x)=\frac{\arccos x}{\log_5 x}$, $f(x)=\frac{2^x}{\sin x}$

j) $f(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin(x^2)$, $f(x)=\cos^3 x$, $f(x)=\cos(x^3)$

k) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\sqrt{x^3+2x+1}$, $f(x)=\sqrt[4]{x^3+2x+1}$

l) $f(x)=\sin(\ln x)$, $f(x)=2^{\sin x}$, $f(x)=\mathrm{tg}\sqrt{x}$, $f(x)=\mathrm{arctg}\, x^2$

m) $f(x)=\mathrm{tg}\sqrt{x^2+x+2}$, $f(x)=\sqrt{2^{\mathrm{tg}\, x}}$, $f(x)=\log_3(\mathrm{arctg}^2 x)$

n) $f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$, $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, $f(x)=\frac{\ln^2(x+5)}{\sqrt{\sin x}}$

o) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\right)+x^3\cdot\ln(x^3+2)$, $f(x)=\sqrt{\mathrm{ctg}\, x+3^x\cdot\ln x}$

p) $f(x)=x^x$, $f(x)=x^{\sin x}$, $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$, $f(x)=(\ln x)^{\ln x}$, $f(x)=\sqrt[x]{x}$

8.3. Gyakorló feladatok

8.8. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját:

a) $f(x) = \sin(2x) \cdot \sqrt{x^2+1}$,

b) $f(x) = x^3 \sin(\ln x)$,

c) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+x+2}}{\ln x}$,

d) $f(x) = \sin\left(\frac{x^3+2x}{x^2+5}\right)$